الموضوع: $\frac{4}{7}$

تمرين: $\sum \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ على المجال $]0,1[$

$\frac{2}{\pi}t \le \sin(t) \le t$
$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\frac{2}{\pi n} = \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\right) \le \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

$\sum \frac{1}{x}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ متباعدة نقطياً من أجل $x \in]0,1[$
وبالتالي ليست متقاربة نقطياً وليست متقاربة بانتظام.

مبرهنة المكاملة هامة جداً:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة من التوابع المعرفة والمستمرة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ إذا كانت السلسلة $\sum f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجال $[a,b]$ عندئذٍ فإن تابع المجموع $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ هو تابع قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ ويتحقق:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

مثال: لتكن سلسلة التوابع $\sum f_n(x)$ المعرفة بالشكل:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{(x\ln x)^n}{n!} & ; 0 < x \le 1 \\ & ; x = 0 \end{cases}$$

1. ادرس التقارب المنتظم للسلسلة على المجال $[0,1]$
2. استنتج أن:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

حيث $f(x)$ تابع المجموع للسلسلة

الحل: من أجل $x = 0$ نحصل على السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ متقاربة.
من أجل $0 < x \le 1$ نقطة مثبتة لندرس التقارب للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x\ln x)^n}{n!}$
بحسب اختبار دالمبير:

الموضوع:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(x\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\frac{(x\ln x)^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x\ln x|}{n+1} = 0 < 1$$

والسلسلة متقاربة من أجل أي نقطة $0 \le x \le 1$

دراسة التقارب بانتظام على المجال $[0,1]$.
حسب فايرشتراس

$|f_n(x)| \le M_n$

$\sum M_n$ متقاربة

لنأخذ $|f_n(x)| = \frac{|x\ln x|^n}{n!} =$

$0 < x < 1$; $x\ln x < 0$

$|x\ln x| = -x\ln x$ لأن $|-2| = -(-2)$ $= \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$

لنوجد: $\sup_{x\in]0,1]} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$

$$g_n(x) = \frac{(-x\ln x)^n}{n!} \Rightarrow g_n'(x) = \frac{1}{n!}\, n\,(x\ln x)^{n-1}(-\ln x - 1)$$

ينعدم المشتق عند $x = e^{-1} \in]0,1]$

نلاحظ أن $g_n'(x) \ge 0$ على المجال $]0, e^{-1}]$

$g_n'(x) \le 0$ " " $[e^{-1}, 1]$

وبالتالي التابع $g_n(x)$ يبلغ نهاية عظمى عند $x = e^{-1}$.

$$\sup_{x\in]0,1]} \frac{(-x\ln x)^n}{n!} = \frac{(-e^{-1}\ln e^{-1})^n}{n!} = \frac{1}{e^n\, n!}$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \le \frac{1}{e^n\, n!} \quad \forall n\in\mathbb{N} ;\ \forall x\in[0,1]$$

لندرس تقارب السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n\, n!}$ حسب اختبار دالمبير:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{1}{e^{n}\cdot n!}} = \frac{1}{e(n+1)} = 0 < 1$$

فالسلسلة متقاربة

وبحسب اختبار فايرشتراس تكون السلسلة التابعية $f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $[0,1]$.

2

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{(x\ln x)^n}{n!} & ; 0 < x \le 1 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

لندرس استمرار التوابع $f_n(x)$ على المجال $[0,1]$ نجد:

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x\ln x)^n}{n!} = \frac{[\lim_{x\to 0} x\ln x]^n}{n!} = 0 = f_n(0)$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0\cdot\infty = \frac{\ln x}{x^{-1}}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = 0$$

والتوابع f_n مستمرة على المجال $[0,1]$

وبحسب مبرهنة المكاملة حداً حداً يكون التابع f تابع المجموع للسلسلة قابلة للمكاملة على $[0,1]$ ويكون:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)\,dx$$

مبرهنة الاشتقاق حداً حداً:

لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة من التوابع المعرفة على المجال $[a,b]$.
لنفرض أن جميع التوابع $f_n(x)$ حيث $(n=1,2,\dots)$ قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$.
وأن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ تتقارب من تابع المجموع $f(x)$ على المجال $[a,b]$
" " " بانتظام على المجال $[a,b]$
عندئذ تابع المجموع $f(x)$ يكون قابلاً للاشتقاق على المجال $[a,b]$، ويكون:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad ; \quad \forall x \in [a,b]$$